LÓGICA PROPOSICIONAL 2

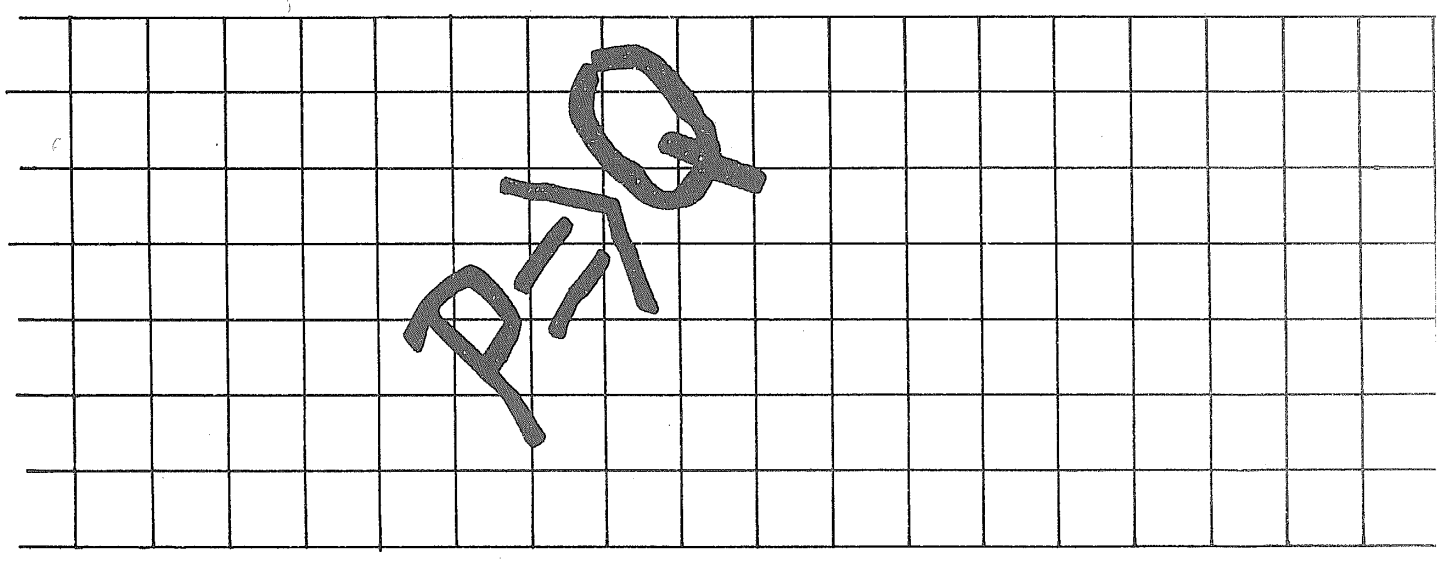
Argumentos

Obras que integran el bloque 3 *(Nociones de lógica matemática):*

1. Lógica proposicional 1. Proposiciones
2. Lógica proposicional 2. Argumentos

ANUIES

Asociación Nacional de Universidades
e Institutos de Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 3

Nociones de lógica matemática

Módulo 2

LÓGICA PROPOSICIONAL 2

Argumentos

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
LÓGICA PROPOSICIONAL 2
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, mayo 1984
ISBN 968-24-1239-0

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

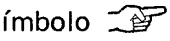
Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta*. Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo  , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

2.1 Argumentos

2.2 Validez de un argumento

2.3 Reglas de inferencia (implicaciones lógicas)

2.4 Reglas de inferencia (equivalencias lógicas)

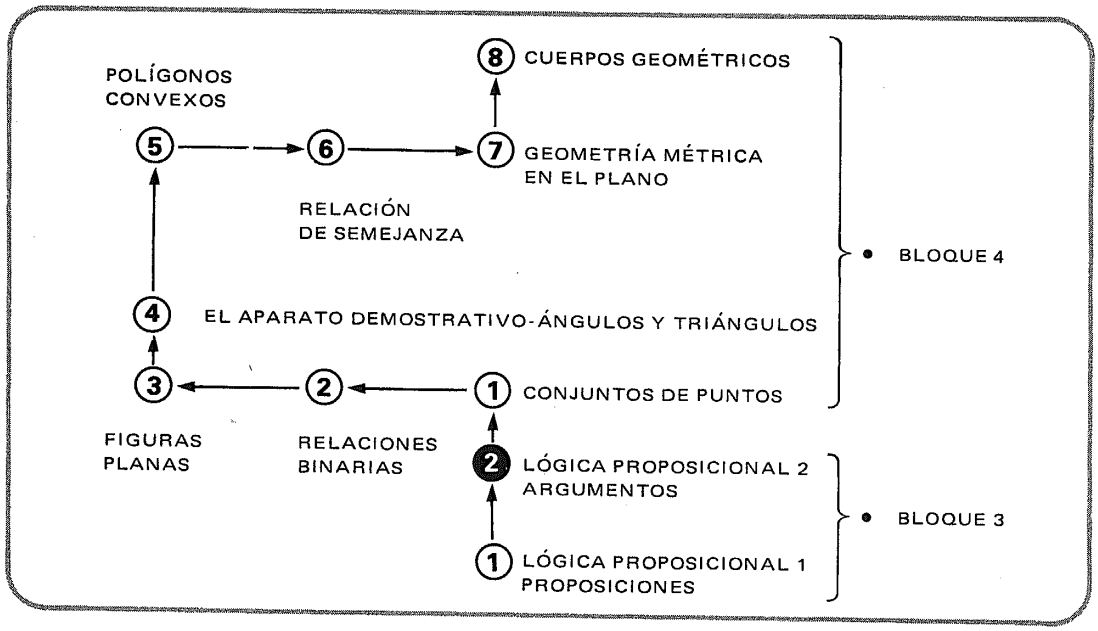
2.5 La demostración matemática

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 3. Nociones de lógica matemática

Objetivos: representar simbólicamente proposiciones y argumentos sencillos expresados en lenguaje común, y determinar el valor de verdad de las primeras y la validez de los segundos

Esquema estructural del bloque 3



Módulo 2. Lógica proposicional 2. Argumentos

Objetivos: demostrar la validez de argumentos sencillos mediante la elaboración de su tabla de verdad correspondiente o al hacer uso de las reglas de inferencias

Prerrequisitos:-

	Bloque	Módulo
• Proposiciones simples o compuestas	3	1

2.1

Argumentos

1

Consideremos
las siguientes proposiciones:

1. *Si Pedro estudia, entonces aprobará el curso.*

2. *Pedro estudia,*
   por lo tanto,
3. *Pedro aprobará el curso.*

2

De las proposiciones

1. *Si Pedro estudia, entonces aprobará el curso,*
   y
2. *Pedro estudia,*

deducimos

3. *Pedro aprobará el curso.*

3

Una secuencia de proposiciones como ésta:

1. *Si Pedro estudia, entonces aprobará el curso.*

2. *Pedro estudia,*
   por lo tanto,
3. *Pedro aprobará el curso,*

constituye un

argumento deductivo.

Por razones de brevedad utilizaremos en este estudio,
el término

argumento.

4

A las proposiciones 1 y 2
les llamaremos:

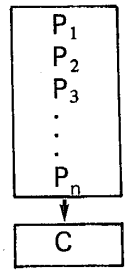
premisas

A la proposición 3:

conclusión.

5

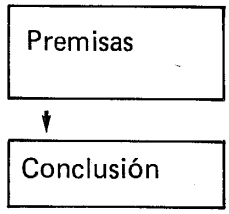
Entonces,
argumento
será una secuencia de
proposiciones en la que
una proposición llamada
conclusión
se deduce de
un conjunto
de proposiciones
llamadas
premisas.



6

En un argumento
debemos considerar:

- las premisas,
- la conclusión,
- el hecho de que
  la conclusión
  se deduce*
  de las premisas.



*Es decir, se desprende, se saca, se infiere.

7

En el argumento:

1. *Si el cobre es un metal,*
   entonces es un buen conductor de la electricidad.

2. *El cobre es un metal,*
   por lo tanto,
3. *El cobre es un buen conductor de la electricidad.*

De las premisas: [_____] 1 y 2

deducimos la conclusión: [___] 3

8

Dado un argumento,
se plantean dos cuestiones:

1. ¿Son verdaderas las premisas?

2. ¿Están relacionadas las premisas
   con la conclusión, de manera
   que esta última se deduce (es decir:
   se desprende correctamente)
   de las primeras?

9

1. ¿Son verdaderas las premisas?

Una premisa, como cualquiera otra proposición, puede ser verdadera o falsa,

por su

contenido

o

por su [_____]

forma lógica

10

Por ejemplo:

la proposición: *México está en América*

es [_____]

verdadera/falsa

por su [_____]

contenido/forma lógica

verdadera

contenido

11

Para decidir sobre la verdad o falsedad de una proposición como:

México está en América

es necesario confrontar su significado con la realidad.
Recurrimos aquí a nuestra experiencia, a los conocimientos de Geografía, Historia, Física, Química, etc. La lógica no se ocupa de este tipo de verdad, llamada

verdad empírica.

12

La proposición:

México está en Europa o no está en Europa

es: [verdadera/falsa]

por su: [contenido/forma lógica]

verdadera

forma lógica

13

México está en Europa o no está en Europa,

es una proposición

verdadera.

De este tipo de verdad,
que llamamos

verdad formal,

se ocupa la lógica.

14

2. ¿Se relacionan las premisas con la conclusión, de manera que la última se deduce de las primeras?

De esta cuestión se ocupa también la Lógica, estableciendo las "reglas del juego" por medio de las cuales podemos deducir una cosa de otra.

15

Entonces, en un argumento,

cada una de las premisas puede ser:

verdadera o falsa,

y
la conclusión puede ser:

verdadera o falsa.

16

Consideremos el **Argumento 1:**

1. *6 es un número par y divisible por 3.*

2. *Si 6 es un número par, entonces 36 es un número par;*
   luego,
3. *6 y 36 son números pares.*

17

De acuerdo con nuestros conocimientos matemáticos, la premisa 1:

6 es un número par y divisible por 3

es [verdadera/falsa]
porque
[ ]

- **verdadera**

- la proposición simple, *6 es un número par* es V (verdad empírica). La proposición simple *6 es divisible por 3* es V (verdad empírica). Y la conjunción de dos proposiciones verdaderas es una proposición verdadera.

18

La premisa 2:

Si 6 es un número par entonces 36 es un número par

es: [ ]
verdadera/falsa

porque

[ ]

- **verdadera**

- la proposición simple *6 es un número par* es V.
  La proposición simple *36 es un número par* es V.
  Y puesto que el antecedente y el consecuente son verdaderos, la condicional es verdadera.

19

La conclusión:

6 y 36 son números pares

es: [ ]
verdadera/falsa

porque:

[ ]

- **verdadera**

- es la conjunción de las dos proposiciones verdaderas:
  6 es un número par
  y
  36 es un número par.

20

Sea, ahora, el **Argumento 2:**

1. *Si México está en Europa, entonces Acapulco está en México.*
2. *Acapulco está en México,*
   por consiguiente,
3. *México está en Europa.*

21

La premisa 1:

Si México está en Europa, entonces Acapulco está en México

es [ ]
verdadera/falsa

puesto que:

[ ]

- **verdadera**

- el antecedente: *México está en Europa* es **F.**
  El consecuente: *Acapulco está en México* es **V.**
  Y la condicional es **V.**

22

La premisa 2:

Acapulco está en México

es [ ]
verdadera/falsa

verdadera

(Verdad empírica.)

23

La conclusión:

México está en Europa

es [ ]
verdadera/falsa

falsa

(Falsedad empírica.)

24

Veamos el **Argumento 3:**

1. *Si el cobre es un metal, entonces el helio es un metal.*
2. *Si el cobre no es un metal, entonces el helio es un gas.*
3. *El helio no es un metal*

   luego,
4. *El helio es un gas.*

25

La premisa 1:

Si el cobre es un metal, entonces el helio es un metal

es [_____]
verdadera/falsa

Razón:

[_____]

falsa

El cobre es un metal ⇒ el helio es un metal

V F

F

26

La premisa 2:

Si el cobre no es un metal, entonces el helio es un gas

es [_____]
verdadera/falsa

Razón:

[_____]

verdadera

El cobre no es un metal ⇒ el helio es un gas

F V

V

27

La premisa 3:

El helio no es un metal

es [_____]
verdadera/falsa

Razón:

[_____]

verdadera

verdad empírica

28

La conclusión:

El helio es un gas

es [_____]
verdadera/falsa

Razón:

[_____]

verdadera

verdad empírica

29

Mucha atención.

El

juego lógico

exigirá lo siguiente:

dado un argumento, debe verificarse que:

Si las premisas son verdaderas
entonces
la conclusión es verdadera.

30

Cuando decimos:

Las premisas son verdaderas
debemos entender:

Todas las premisas son simultáneamente verdaderas,
o, en otras palabras:

la conjunción de las premisas
es
verdadera.

31

Si simbolizamos en
esta forma un argumento:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdash \\ C \end{array}$$

$P_1, P_2, P_3 \cdots P_n$ representan las premisas;
C la conclusión,
y
el símbolo $\vdash$ alguna de las frases: *de donde, por lo tanto, luego,* etc.

32

Para el argumento
así representado:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdash \\ C \end{array}$$

la
conjunción de las premisas
puede ser escrita
en esta forma: $\lfloor_____\rfloor$

$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n$.

33

Dado el argumento:

P_1
P_2
P_3
⋮
P_n
$\vdash$
C

el juego lógico pide que:
Si $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n$ es una proposición verdadera,
C debe ser una proposición [verdadera/falsa]

verdadera

34

Atención.

Si un argumento:

P_1
P_2
P_3
⋮
P_n
$\vdash$
C

respeta la importante regla del juego lógico;
diremos que el argumento es **válido:**

35

Si $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n$ es V,

entonces C es V

y además,
podemos asegurar que
la conclusión se deduce de las premisas,
diremos que
el argumento es
válido.

En caso contrario será
inválido.

36

Entonces, podemos representar el argumento:

por medio de la condicional:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdash \\ C \end{array}$$

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n \Rightarrow C$$

ya que a través de él afirmamos que:
si $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n$ es verdadera,
C deberá ser verdadera.

37

Entonces,

para que el argumento

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \\ \vdash \\ C \end{array}$$

sea **válido**

se requiere que la condicional:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n \Rightarrow C$$

sea **verdadera.**

38

Señalemos los valores de verdad de
la condicional:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n \Rightarrow C$$

					la condicional es:	
Si $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n$ es	V	y	C es	V	V / F	V
Si $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n$ es	V	y	C es	F	V / F	F
Si $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n$ es	F	y	C es	V	V / F	V
Si $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n$ es	F	y	C es	F	V / F	V

39

Si llamamos **P** a la conjunción de las premisas,
es decir: $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdots \wedge P_n = \mathbf{P}$.

El argumento

P_1
P_2
P_3
⋮
P_n
$\vdash$
C

queda simbolizado así: [ ]

y la condicional que lo representa, así: [ ]

P
$\vdash$ o bien $P \vdash C$
C

$P \Rightarrow C$

40

Atención.

Completemos el siguiente esquema:

	la condicional $P \Rightarrow C$ es	el argumento $P \vdash C$ es:	
1. Si P es V y C es V	V / F	**válido/inválido**	V válido
2. Si P es V y C es F	V / F	**válido/inválido**	F inválido
3. Si P es F y C es V	V / F	**válido/inválido**	V válido
4. Si P es F y C es F	V / F	**válido/inválido**	V válido

41

Vemos que:

el argumento $P \vdash C$ es

inválido

cuando,

siendo verdaderas las premisas
la conclusión es [ ]

falsa

42

Si
la **conjunción** de las premisas es *verdadera*
y
la **conclusión** es *verdadera* y se deduce de las premisas,
el argumento es [_____]
válido/inválido

válido

43

Si en un argumento dado

la **conjunción** de las premisas es *verdadera*
y
la **conclusión** es *falsa*,
el argumento es [_____]
válido/inválido

inválido

44

Si se nos da un argumento y podemos ver que:

la conclusión es verdadera y se deduce de las premisas,
aunque
la conjunción de las premisas sea falsa,
decimos que:

tal argumento es [_____]
válido/inválido

(Respetando las reglas del juego lógico, podremos obtener conclusiones verdaderas de premisas falsas.)

válido

Si resulta que, en un argumento dado:

tanto la conjunción de las premisas
como la conclusión son falsas,
pero ésta se deduce de aquéllas,
el argumento es [válido/inválido]

válido

3.2.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una definición de argumento;
- *identificar* las premisas y la conclusión de un argumento dado;
- *obtener* y *reformular* un conjunto de proposiciones que sea identificado como argumento, de manera que las premisas y la conclusión resulten fácilmente identificables.

2.2

Validez de un argumento

46

Queremos saber si el argumento 1:

1. *6 es un número par y divisible por 3*

2. *Si 6 es un número par, entonces 36 es un número par*
   luego
3. *6 y 36 son números pares.*

es válido.

47

Hemos asignado los siguientes valores de verdad a las variables:

1. *6 es un número par y divisible por 3.* V
2. *Si 6 es un número par, entonces 36 es un número par* V
   luego
3. *6 y 36 son números pares* V

La conjunción de las premisas es [ ] V/F
y la conclusión es [ ] V/F

Hace falta saber si la conclusión se deduce de las premisas.

V
V

48

Vamos a aislar la forma lógica del argumento del cuadro anterior, representándolo simbólicamente, mediante la siguiente sustitución:

6 es un número par: p

6 es divisible por 3: q

36 es un número par: r

$p \wedge q$
$p \Rightarrow r$
$\vdash$
$p \wedge r$

49

A una representación simbólica como ésta:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

en que hemos hecho a un lado el contenido y dejado únicamente la forma lógica, le llamamos:

argumento formal.

50

Un caso particular o ejemplo de sustitución del argumento formal:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

es el argumento 1 presentado en el cuadro 46.

51

Ahora bien,
queremos saber si
todos los argumentos
de la forma:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

son válidos.

52

Recordemos que:

un argumento
puede ser representado por
una condicional
cuyo antecedente es: [ ]

y

cuyo consecuente es: [ ]

- la conjunción de las premisas
- la conclusión

53

En el argumento formal:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

la conjunción de las

premisas es: [ ]

y la conclusión es: [ ]

- $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)$
- $p \wedge r$

54

Siendo $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)$ la conjunción de las premisas,
y $p \wedge r$ la conclusión,

el argumento formal:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$

$\vdash$

3. $p \wedge r$

puede ser representado por medio de la

condicional: [ ]

$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$

55

Estudiar con atención.

Argumento formal

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$

$\vdash$

3. $p \wedge r$

Representación en forma de condicional:

$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$$

56

Debemos observar que:

para que el argumento de la derecha:

sea válido, se requiere que la **condicional** que lo representa sea **verdadera** para cualquier combinación de valores de verdad de las proposiciones simples componentes (en este caso: p, q, r)

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$

$\vdash$

3. $p \wedge r$

$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$$

57

Recordemos que

a una proposición compuesta
que es siempre verdadera
para cualquier combinación de
valores de verdad
de las proposiciones simples que la componen,
le hemos llamado:

└_____┘

tautología

58

Entonces,

para que el argumento:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$

$\vdash$

3. $p \wedge r$

sea válido, la
condicional que lo
representa debe

$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$$

ser una: └_____┘

tautología

59

Recordemos, también, que:

a una proposición que es una

condicional

y una

tautología

le hemos dado el nombre de:

└_____┘

implicación lógica

60

Para que el argumento:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$

$\vdash$

3. $p \wedge r$

sea válido,
la proposición

$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$$

debe ser una

implicación lógica

61

En general,

si P representa la conjunción de las premisas,
y C representa la conclusión, el

argumento formal: $P \vdash C$

será

válido,

si: $P \Rightarrow C$

es una: [ ]

implicación lógica

62

En otras palabras,

el argumento formal: $P \vdash C$

será valido, si: [ ]

implica lógicamente a: [ ]

la conjunción de las premisas (P)

la conclusión (C)

63

Estudiar con mucha atención.

Si $P \vdash C$ es un argumento válido

entonces $P \Rightarrow C$ es una implicación lógica,
y recíprocamente,

Si $P \Rightarrow C$ es implicación lógica.

entonces $P \vdash C$ es un [ ]

Podemos afirmar, por lo tanto, que

$P \vdash C$ es un argumento válido
[ ] $P \Rightarrow C$ es una implicación lógica

Indicar el conectivo lógico que corresponda

argumento válido

si y sólo si

64

Atención.

$\boxed{P \vdash C}$ es un argumento válido

si y sólo si $\boxed{P \Rightarrow C}$ es una implicación lógica.

65

Si $P \Rightarrow C$ es una implicación lógica
no puede suceder que,
en el argumento $P \vdash C$,

la conjunción de las premisas sea: [ ]
V/F

y la conclusión sea: [ ]
V/F

V

F

66

Si $P \Rightarrow C$ es una implicación lógica,
decimos que
en el argumento:

$P \vdash C$

la conclusión (C)

se deduce de

las premisas P.

67

Entonces,
si queremos saber si todos
los casos particulares
o ejemplos de sustitución
del argumento formal:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$

   $\vdash$
3. $p \wedge r$

son válidos,
necesitamos demostrar que:

$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$
es una implicación lógica

68

Y
¿cómo podemos probar que

$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$$

es una implicación lógica?

69

Puesto que:

$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$$

es una condicional,
para demostrar que es implicación lógica,

hace falta probar que es: ⌊_____⌋

una tautología

70

Recordemos que:

una manera de probar que la condicional

$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$$

es una tautología, consiste en:

⌊_____⌋

Atención.

Elaborar una tabla de verdad (si se trata de una tautología, todos los valores de verdad de la condicional: $[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$ deberán ser V).

71

Procedamos, entonces, a construir
la tabla de verdad de la condicional:

$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$$

En primer lugar:

la tabla deberá tener ⌊_⌋ renglones,
puesto que el número de proposiciones
simples (variables) involucradas es igual a ⌊_⌋

8 (2^3)

3

72

Llenemos, ahora, las primeras tres columnas de la tabla con los valores de verdad de las variables para obtener las 8 combinaciones de valores de verdad posibles.

p	q	r

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

73

Completemos la siguiente tabla.

$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)]$ $[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \Rightarrow r$	•	$p \wedge r$	•
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Respuesta en el cuadro siguiente.

$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)]$ $[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \Rightarrow r$	•	$p \wedge r$	•
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F	V

74

La tabla de verdad del cuadro anterior muestra que la condicional:

$$[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \wedge r)$$

es una tautología,
por lo tanto,

el argumento formal:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

es [válido/inválido]

válido

75

Cualquier argumento particular que tenga la forma:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

es válido.

76

Un caso o ejemplo de sustitución del argumento formal:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

es el argumento particular:

1. *6 es un número par y divisible por 3.*
2. *Si 6 es un número par, entonces 36 es un número par*
   luego
3. *6 y 36 son números pares.*

77

Puesto que hemos demostrado que el argumento formal:

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$

   $\vdash$
3. $p \wedge r$

es válido, el argumento particular:

1. *6 es un número par y divisible por 3.*
2. *Si 6 es un número par, entonces 36 es un número par*

   luego
3. *6 y 36 son números pares*

es [válido/inválido]

válido

78

En otras palabras,

de { *6 es un número par y divisible por 3* y *si 6 es un número par, entonces 36 es un número par* }

es válido concluir que:

[ ]

6 y 36 son números pares

79

O bien,

de { *6 es un número par y divisible por 3* y *si 6 es un número par, entonces 36 es un número par* }

podemos

deducir

que: [ ]

6 y 36 son números pares

80

Argumento 2.

Valores de verdad asignados

1. *Si México está en Europa, entonces Acapulco está en México.* — V
2. *Acapulco está en México* — V

la conjunción de las premisas es V / F

luego

3. *México está en Europa.* — F

Por ser verdadera la conjunción de las premisas y falsa la conclusión, nos apresuramos a afirmar que este argumento es [válido/inválido]

V

inválido

81

Ahora bien,
¿son inválidos todos los argumentos que tienen la forma del argumento 2?

Si:

p: *México está en Europa,*

q: *Acapulco está en México;*

la forma lógica del argumento 2 es:

[ ]

1. $p \Rightarrow q$
2. q
   $\vdash$
3. p

82

Vamos a investigar si el argumento formal:

1. $p \Rightarrow q$
2. q
   $\vdash$
3. p

es válido o inválido.

Para ello, empezaremos por representar el argumento por medio de la condicional:

[ ]

$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

83

Para probar que
el argumento formal

1. $p \Rightarrow q$
2. q
   $\vdash$
3. p

↓ es válido, se requiere demostrar que la condicional

$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

es una [ ]

tautología

84

Para demostrar que
la condicional

$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

es una tautología,

se requiere [ ]

construir su tabla de verdad

85

La tabla de verdad
de

$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

tiene [ ] renglones

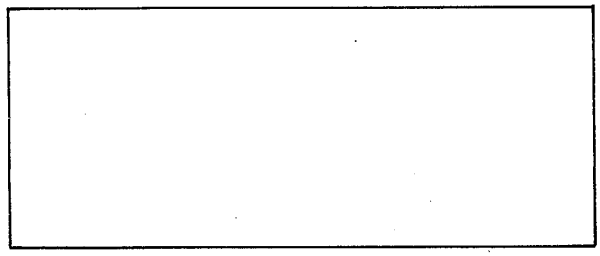
por tener [ ] variables

4 (2^2)

2

86

Tabla de verdad de $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$



Respuesta
en el
cuadro siguiente

Tabla de verdad de

$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	•
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

87

La tabla de verdad del cuadro anterior
muestra que
el argumento formal

1. $p \Rightarrow q$
2. q

$\vdash$

3. p

es [válido/inválido]

porque [ ]

inválido

la condicional
$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$
no es una tautología

88

La
tabla de verdad
de

$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

nos indica que, en el argumento analizado
hay una combinación de valores de verdad
de las proposiciones componentes,
en que,
siendo verdadera la conjunción de las premisas,
es falsa la conclusión.

p	q	$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F ←
F	F	V

89

Como en el argumento formal

1. $p \Rightarrow q$
2. q

   $\vdash$
3. p

puede darse el caso de que sea falsa la
conclusión, siendo verdaderas las premisas,
concluimos que
todos los argumentos particulares que
tengan esta forma lógica son válidos/inválidos

inválidos

90

En el argumento particular

1. *Si México está en Europa,*
   entonces Acapulco está en México. V
2. *Acapulco está en México,* V
   luego,
3. *México está en Europa.* F

(1, 2) → V

en que p: México está en Europa, F

y

q: Acapulco está en México, V

ocurre precisamente que,
siendo verdaderas las premisas, es falsa
la conclusión.

91

No perdamos de vista la tabla de verdad del argumento formal

1. $p \Rightarrow q$
2. q
   $\vdash$
3. p

$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

p	q	•
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

92

Ahora,
consideremos este argumento particular

1. *Si México está en América,*
   entonces Acapulco está en México

2. *Acapulco está en México*
   luego
3. *México está en América.*

en que
la conjunción de las premisas es ⌊ ⌋ V/F

y

la conclusión es ⌊ ⌋ V/F

V

V

93

El argumento del cuadro anterior
es / no es
un caso particular o
ejemplo de sustitución del argumento formal:

1. $p \Rightarrow q$
2. q
   $\vdash$
3. p

es

94

Por ser el último argumento considerado
un caso particular del argumento formal

1. $p \Rightarrow q$
2. q
   ⊢
3. p

que hemos demostrado que es inválido,
decimos que
tal argumento particular es inválido.

95

Consideremos ahora el argumento:

1. *Si México está en América,*
   entonces Acapulco está en México.

2. *Acapulco está en México*
   luego
3. *México está en América.*

96

Aunque

ocurre que siendo [_____] las premisas,
verdaderas/falsas
es [_____] la conclusión,
verdadera/falsa
el argumento del cuadro anterior es [_____]
válido/inválido
por ser un caso particular de un argumento
formal [_____]
válido/inválido

verdaderas

verdadera

inválido

inválido

97

De
- Si México está en América entonces Acapulco está en México,
y
- Acapulco está en México.

no es válido concluir que

- México está en América.

98

De
- $p \Rightarrow q$
y
- q

no podemos deducir

- p

99

Para que

de
- $p \Rightarrow q$
y
- q

pudiéramos deducir p
se requiriría que
[ ] implicara lógicamente a [ ]

$(p \Rightarrow q) \wedge q$ — conjunción de las premisas

p — conclusión

100

En otras palabras,
para que

de { • $p \Rightarrow q$
y
• q }

pudiéramos deducir p
se requiriría que

$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ fuera una [ ]

implicación lógica
o una tautología.

101

Como a través de la tabla de verdad

hemos demostrado que

$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow p$

es/no es

una tautología

ningún argumento de la forma → 1. $p \Rightarrow q$ 2. q $\vdash$ 3. p

es [ ]
válido/inválido

no es

válido

102

Ahora
vamos a investigar si el **Argumento 3:**

1. *Si el cobre es un metal*
   entonces el helio es un metal.

2. *Si el cobre no es un metal*
   entonces el helio es un gas.

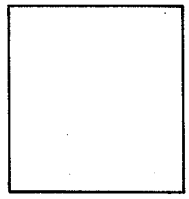
3. *El helio no es un metal*
   luego
4. *El helio es un gas.*

es válido o inválido.

103

Si hacemos
- p: el cobre es un metal
- q: el helio es un metal
- r: el helio es un gas

la forma lógica del argumento 3 puede ser representada por medio de la fórmula:



1. $p \Rightarrow q$
2. $\sim p \Rightarrow r$
3. $\sim q$

   $\vdash$
4. r

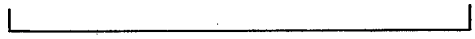
104

Argumento formal

1. $p \Rightarrow q$
2. $\sim p \Rightarrow r$
3. $\sim q$

   $\vdash$
4. r

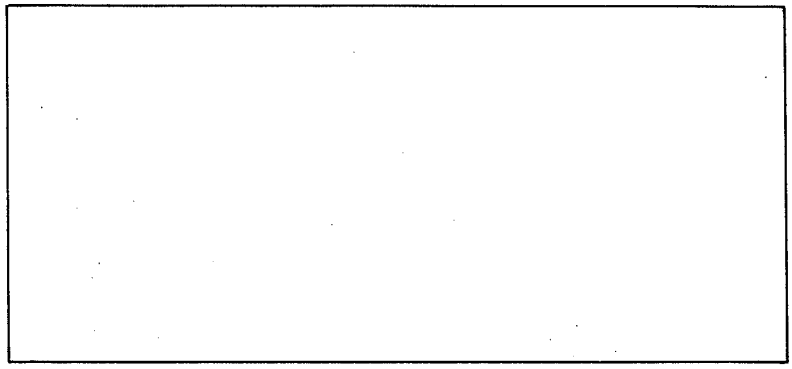
Condicional que lo representa:



$[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge \sim q] \Rightarrow r$

105

Tabla de verdad de
$[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge \sim q] \Rightarrow r$.



Respuesta en el cuadro siguiente.

$[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge \sim q] \Rightarrow r$ $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge \sim q]$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow r$	$\sim q$	•	•
V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V

106

El argumento formal:

1. $p \Rightarrow q$
2. $\sim p \Rightarrow r$
3. $\sim q$

   $\vdash$
4. r

es [válido/inválido]

válido

107

El argumento particular

1. Si el cobre es un metal,
   entonces el helio es un metal.

2. Si el cobre no es un metal,
   entonces el helio es un gas.

3. El helio no es un metal,
   luego
4. El helio es un gas.

es [válido/inválido]

válido

3.2.2.1

Práctica
de obtención
de la forma lógica
de un
argumento particular dado,
si se considera necesario.

3.2.2.2

Práctica
de elaboración
de ejemplos de sustitución
de
un argumento formal dado,
si se considera necesario.

3.2.2.3

Práctica
para
determinar
si un argumento dado
(particular o formal)
es válido o inválido
mediante la elaboración de su tabla de verdad,
si se considera necesario.

3.2.2.

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* el criterio de validez de un argumento;
- *dar* la forma lógica de un argumento particular dado;
- *dar* ejemplos de sustitución de un argumento formal dado;
- *determinar* la validez o invalidez de un argumento dado (formal o particular) mediante la elaboración de su tabla de verdad.

2.3

Reglas de inferencia
(implicaciones lógicas).

108

Hemos visto cómo podemos determinar
la

validez o invalidez

de un argumento
mediante la elaboración de
la

tabla de verdad

de la condicional que lo representa.

109

Sin embargo,
cuando el número de variables
involucradas en el argumento
es grande,
el trabajo necesario para la
construcción de la tabla de verdad
puede resultar excesivo.

110

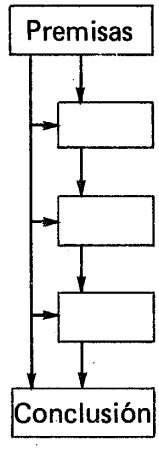
Estudiaremos
un procedimiento alternativo
por medio del cual
podemos determinar
si las premisas y la conclusión
están relacionadas de tal manera que
la última se deduce de las primeras.

111

En este procedimiento,
vamos a seguir la

línea de razonamiento

que va
de las premisas
a la
conclusión final,
pasando por una serie de
conclusiones intermedias.



112

Reglas de inferencia

serán
las
reglas del juego lógico
que
permitirán

deducir

una proposición de otras.

113

Supongamos que están dados

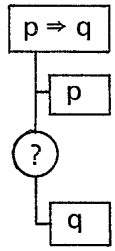
- una condicional

y

- su antecedente

nos preguntamos si podemos deducir de ellos

- su consecuente



114

En otras palabras,

de las premisas { 1. p ⇒ q y 2. p }

¿podemos obtener como conclusión **q**?

115

O bien,

el argumento formal

1. p ⇒ q
2. p

   ⊢
3. q

¿es válido?

116

Sabemos que
el argumento

1. $p \Rightarrow q$
2. p

$\vdash$

3. q

es válido si y sólo si

[ ]

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
es una implicación lógica

117

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

es / no es

una implicación lógica,
porque

[ ]

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

$(p \Rightarrow q) \wedge p$

$p \Rightarrow q$

p	q	•	•	•
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

- es
- es una condicional,
  y
- es una tautología,
  como puede verse a través
  de su tabla de verdad

118

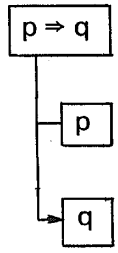
De
una condicional
y
su antecedente
es válido concluir
el consecuente.

Esta es una regla del juego lógico
a la que se ha dado el nombre de

modus ponendo ponens

Abreviatura:

mpp



119

Regla de inferencia

- **Modus ponendo ponens**

En forma de argumento:

1. $p \Rightarrow q$
2. p

   $\vdash$
3. q

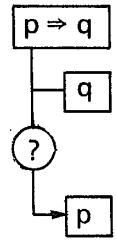
En forma de condicional:

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q.$

120

En el submódulo anterior,
hemos encontrado que

de { • una condicional y • su consecuente }



es / no es

válido concluir

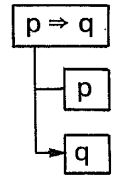
- el antecedente.

no es

121

Atención.

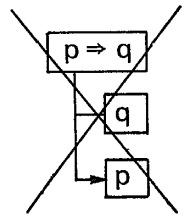
De { • una condicional y • su antecedente }



es válido concluir
- el consecuente.

lo permite la regla llamada:

De { • una condicional y • su consecuente }



no es válido concluir
- el antecedente.

modus ponendo ponens

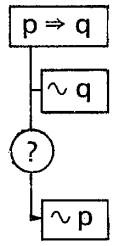
122

Ahora queremos saber
si, dados:

- una condicional
  y
- la negación de su
  consecuente,

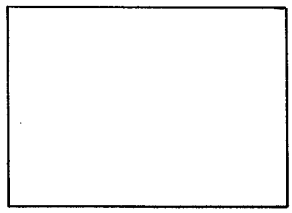
podemos concluir

- la negación del antecedente



123

Argumento formal
correspondiente →



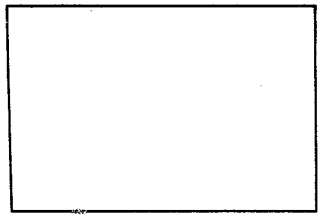
Condicional:

1. $p \Rightarrow q$
2. $\sim q$
   $\vdash$
3. $\sim p$

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

124

Tabla de verdad de $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.



$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

$p \Rightarrow q$ $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$

p	q	•	∼q	•	∼p	•
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

125

De { • una condicional
y
• la negación de su consecuente }

se deduce/no se deduce

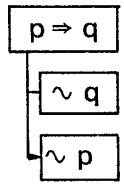
la negación del antecedente.

se deduce

126

A la regla que
nos va a permitir
obtener

de { • una condicional
y
• la negación de su consecuente }



• la negación del antecedente

se le llama

modus tollendo tollens

Abreviatura:

mtt

127

Por ejemplo:

de { • *Si asiste a la cita*
entonces no le soy indiferente
y
• *Asiste a la cita* }

podemos/no podemos

concluir que

No le soy indiferente.

En caso de respuesta afirmativa,
dar la regla que permite tal inferencia

podemos

mpp

128

De
- *Si asiste a la cita*
  entonces no le soy indiferente
  y
- *No le soy indiferente*

podemos/no podemos

concluir que

Asistirá a la cita.

En caso de respuesta afirmativa, señalar la regla de inferencia que hace posible tal deducción. ⌊_____⌋

no podemos

mpp

129

De
Si asiste a la cita
entonces no le soy indiferente
y
Le soy indiferente

podemos/no podemos

concluir que

No asistirá a la cita.

Regla de inferencia que lo permite: ⌊____⌋
(en caso de respuesta afirmativa).

podemos

mtt

130

Atención.

De
Si asiste a la cita
entonces no le soy indiferente
y
No asiste a la cita

podemos/no podemos

concluir que

Le soy indiferente.

Regla de inferencia que lo permite: ⌊____⌋
(en caso de respuesta afirmativa).

no podemos

comentario en el siguiente cuadro

131

De { $p \Rightarrow q$; y ; $\sim p$

no es válido concluir $\sim q$
puesto que $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim q$
no es una implicación lógica, como se
desprende de la siguiente tabla de verdad.

				$(p \Rightarrow q) \wedge \sim p$		
p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	•	$\sim q$	•
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

3.2.3.1

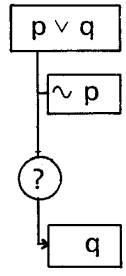
Práctica adicional,
si se
considera necesario.

132

De { • una disyunción inclusiva ; y ; • la negación de una de sus componentes

es válido/no es válido

concluir
• la otra componente,
porque



es válido

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
es una implicación lógica,
como lo muestra la tabla
de verdad del cuadro
siguiente.

133

Tabla de verdad de $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

		$p \vee q$		$(p \vee q) \vee \sim p$	
p	q	•	$\sim p$	•	•
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V

134

La regla de inferencia
llamada

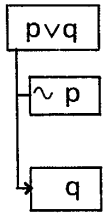
modus tollendo ponens

mtp

nos permite deducir:

de
- una disyunción inclusiva
  y
- la negación de una de sus componentes

- la otra componente.



135

Por ejemplo:

de
- *Pedro o Juan es el culpable* *
  y
- *Pedro no es el culpable*

podemos concluir

[ ]

Juan es el culpable

de acuerdo con la regla de inferencia
llamada [ ]

modus tollendo ponens

que se abrevia [ ]

mtp

*Disyunción inclusiva

3.2.3.2

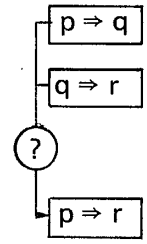
Práctica adicional,
si
se considera necesario.

136

Nos preguntamos, si

de las condicionales { • $p \Rightarrow q$ y • $q \Rightarrow r$

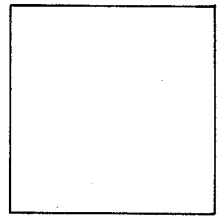
es válido deducir
la condicional • $p \Rightarrow r$



Investiguémoslo.

137

Argumento formal correspondiente →



Condicional:

1. $p \Rightarrow q$
2. $q \Rightarrow r$

   $\vdash$
3. $p \Rightarrow r$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

138

Tabla de verdad de $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Tabla de verdad de $\underbrace{[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)]}_{\bullet} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r)}_{\bullet}$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

139

Sí es posible deducir de las dos condicionales
- $p \Rightarrow q$
- y
- $q \Rightarrow r$

la condicional $p \Rightarrow r$

A la regla de inferencia que permite tal cosa se le llama

ley de transitividad
o
silogismo hipotético

$p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow r$
$p \Rightarrow r$

Abreviadamente:

trans

140

Ejemplo:

de acuerdo con la

ley de transitividad
o
silogismo hipotético,

de
- *Si no existen pruebas suficientes entonces el acusado saldrá libre.*
- y
- *Si el acusado sale libre, entonces podrá reunirse con su esposa.*

podemos concluir que [_____]

si no existen pruebas suficientes, entonces el acusado podrá reunirse con su esposa.

3.2.3.3

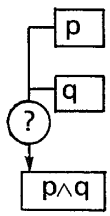
Práctica adicional,
si
se considera necesario.

141

Señalar la opción correcta:

Dadas dos proposiciones
p y q
podemos deducir
su conjunción
p∧q.

V/F



V

(ver cuadro siguiente)

142

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$ es una implicación lógica.

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	•
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

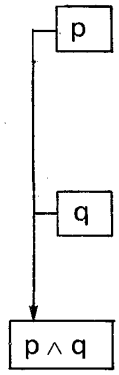
143

Llamamos

ley de la conjunción

conj

a la
regla de inferencia
que nos permite
deducir
de dos proposiciones
su conjunción.



144

Por ejemplo:

de { • *Eres un flojo* y • *Vas a reprobar el curso de Matemáticas,*

la

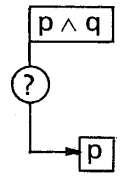
ley de la conjunción

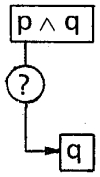
nos permite
sacar como conclusión: [ ]

Eres un flojo y vas a reprobar el curso de Matemáticas.

145

Dada la conjunción
de dos proposiciones,
es válido concluir
una cualquiera de ellas.





V/F

V (ver cuadro siguiente)

146

Tablas de verdad

de
$(p \wedge q) \Rightarrow p$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

de
$(p \wedge q) \Rightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

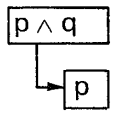
147

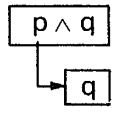
Llamamos

ley de la simplificación

simpl

a la regla de inferencia
que nos permite deducir
de una conjunción dada,
una cualquiera de sus
componentes.





148

Por ejemplo:

de: *Miguel Ángel fue pintor y escultor*

la

ley de la simplificación

nos
permite concluir:

_____

o bien

_____

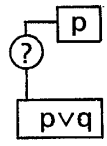
Miguel Ángel fue pintor

Miguel Ángel fue escultor

149

De una proposición dada
es válido concluir
su disyunción inclusiva
con otra proposición
cualquiera.

V/F



V (ver cuadro siguiente)

150

Tabla de verdad de $p \Rightarrow (p \vee q)$

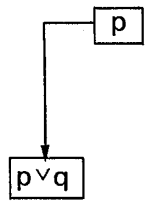
		$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
p	q	•	•
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

151

A la regla de inferencia
que nos permite deducir
de una proposición dada
su disyunción inclusiva
con otra proposición
cualquiera,
se le da el nombre de

ley de la adición

ad



152

De:

5 es un número positivo

la regla de inferencia llamada [ley de la adición]
nos permite concluir, por ejemplo, que:

5 es un número positivo o
negativo.

3.2.3.4

Práctica adicional
de
familiarización
con las reglas de inferencia
(conjunción, simplificación y adición),
si se considera necesario.

153

Aunque es posible
establecer
muchas más

reglas de inferencia

en la forma de

implicaciones lógicas,

nos bastará
con las que hemos presentado.

154

Resumen de las

Reglas de inferencia
(implicaciones lógicas)
estudiadas.

155

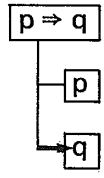
1. **Modus ponendo ponens**

   (mpp)

   (afirmando afirma)

$p \Rightarrow q$
p
$\vdash$
q

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$



156

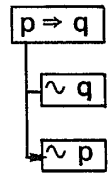
2. Modus tollendo tollens

(mtt)

(negando niega)

$p \Rightarrow q$
$\sim q$
$\vdash$
$\sim p$

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$



157

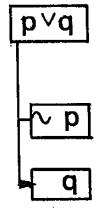
3. Modus tollendo ponens

(mtp)

(negando afirma)

$p \vee q$
$\sim p$
$\vdash$
q

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$



158

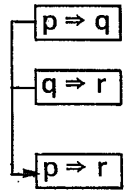
4. Ley de la transitividad

(trans)

o silogismo hipotético

$p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow r$
$\vdash$
$p \Rightarrow r$

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$



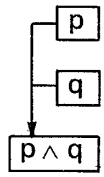
159

5. Ley de la conjunción

(conj)

p
q
$\vdash$
$p \wedge q$

$(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge q)$



160

6. Ley de la simplificación

(simpl)

$p \wedge q$
$\vdash$
p

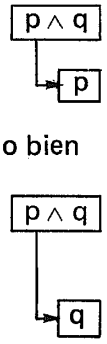
o bien

$p \wedge q$
$\vdash$
q

$(p \wedge q) \Rightarrow p$

o bien

$(p \wedge q) \Rightarrow q$



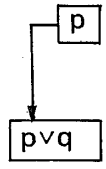
161

7. Ley de la adición

(ad)

p
$\vdash$
$p \vee q$

$p \Rightarrow (p \vee q)$



162

Desde luego,
un argumento que tiene la forma
de una regla de inferencia (implicación lógica)
es [_____]
válido/inválido

válido

163

1. *Si x es un número racional,*
   entonces es un número real.

2. *x no es un número real,*
   por lo tanto,

3. [_____]

Regla de inferencia usada para obtener la conclusión

[_____] [_____]
en forma abreviada

x no es número racional

modus tollendo tollens
(mtt)

164

1. $x \in N$,
2. x es par,
   por consiguiente,

3. [_____]

Regla de inferencia usada:

[_____] [_____]

$x \in N$ y x es par

ley de la conjunción
(conj)

165

1. $x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 5$
2. $x \geqslant 0$

$\vdash$

3. [ ]

Regla de inferencia usada:

[ ] [ ]

$x \geqslant 5$

modus ponendo ponens (mpp)

166

1. *17 es un número primo y es menor que 100*

$\vdash$

2. [ ]

Regla de inferencia empleada:

[ ] [ ]

17 es un número primo
o bien
17 es un número menor que 100

ley de la simplificación (simpl)

167

1. $x \in Z \Rightarrow x \in Q$
2. $x \in Q \Rightarrow x \in R$

$\vdash$

3. [ ]

Regla de inferencia empleada:

[ ] [ ]

$x \in Z \Rightarrow x \in R$

ley de la transitividad (trans)
o silogismo hipotético

168

1. *x es par o impar*
2. *x no es par*

   ⊢
3. [ ]

Regla de inferencia empleada:

[ ] [ ]

x es impar

modus tollendo ponens (mtp)

169

1. $x \geqslant 5$

   ⊢
2. $x \geqslant 5 \vee x \leqslant 2$

Regla de inferencia empleada:

[ ] [ ]

ley de la adición (ad)

3.2.3.5

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

170

Completar el argumento siguiente

1. r (premisa)
2. s (premisa)
⊢
3. [ ] [ ]

Conclusión

Regla de inferencia empleada

r∧s conj

171

Adoptaremos este tipo de representación simbólica

1. r (P) } premisas
2. s (P) }
⊢
3. r ∧ s (conj 1,2) ← ley de la conjunción aplicada a las proposiciones 1 y 2

172

Ahora,
decimos que
el argumento

1. r (P)
2. s (P)
⊢
3. r ∧ s (conj 1, 2)

es válido
porque tiene la forma de la regla de inferencia
llamada [ ]

ley de la conjunción

173

Completar de acuerdo con la convención adoptada.

1. $p \Rightarrow q$ ⌊____⌋
2. p ⌊____⌋
   $\vdash$
3. ⌊____⌋ ⌊____⌋

(P)
(P)

q (mpp 1,2)

174

El argumento

1. $p \Rightarrow q$ (P)
2. p (P)
   $\vdash$
3. q (mpp 1, 2)

es válido,
porque tiene la forma de la regla de inferencia

⌊____⌋

modus ponendo ponens

175

Completar

1. $m \Rightarrow n$ ⌊____⌋
2. $n \Rightarrow p$ ⌊____⌋
   $\vdash$
3. ⌊____⌋ ⌊____⌋

(P)
(P)

$m \Rightarrow p$ (trans 1, 2)

176

El argumento

1. $m \Rightarrow n$ (P)
2. $n \Rightarrow p$ (P)
   $\vdash$
3. $m \Rightarrow p$ (trans 1, 2)

tiene la forma de la regla de inferencia llamada [ ]

ley de la transitividad o silogismo hipotético

177

Completar

1. $r \vee s$ [ ]
2. $\sim r$ [ ]
   $\vdash$
3. [ ] [ ]

(P)
(P)

s (mtp 1, 2)

178

La forma lógica del argumento

1. $r \vee s$ (P)
2. $\sim r$ (P)
   $\vdash$
3. s (mtp 1, 2)

corresponde a la regla de inferencia llamada [ ]

El argumento es [ ] válido/inválido

modus tollendo ponens

válido

179

Completar

1. $r \wedge s$ [ ]
   $\vdash$
2. [ ] [ ]

(P)

r (simpl 1)

o bien,

s (simpl 1)

180

1. $r \wedge s$ (P)
   $\vdash$
2. r (simpl 1)

Este argumento tiene la forma
de la regla de inferencia que hemos llamado

[ ]

El argumento es [ ]
válido/inválido

ley de la simplificación

válido

181

Completar

1. q [ ]
   $\vdash$
2. [ ] [ ]

(P)

$q \vee r$ (ad 1)

(Puede ser r, o cualquier otra literal representativa de una proposición.)

182

1. q (P)
   ⊢
2. q ∨ r (ad 1)

Esta es la representación de un argumento formal [válido] / [inválido]

Tiene la forma de la regla de inferencia llamada [ley de la adición]

válido

ley de la adición

183

Completar

1. m ⇒ n [ ]
2. ∼ n [ ]
   ⊢
3. [ ] [ ]

(P)
(P)

∼ m (mtt 1, 2)

184

1. m ⇒ n (P)
2. ∼ n (P)
   ⊢
3. ∼ m (mtt 1, 2)

El argumento es [válido] / [inválido]

Su forma es la de la regla de inferencia conocida con el nombre de [modus tollendo tollens]

válido

modus tollendo tollens

3.2.3.6

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

185

En algunos casos,
es necesario aplicar más de una
regla de inferencia
para obtener
la conclusión de un argumento.

186

Consideremos el argumento

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$

   $\vdash$
3. $p \wedge r$

cuya validez hemos ya determinado, en
un submódulo anterior, mediante la elaboración
de su tabla de verdad.

187

El argumento

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

tiene/no tiene

la forma de alguna de las
reglas de inferencia estudiadas.

no tiene

188

En el argumento

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

necesitamos

demostrar

que la conclusión se deduce de las premisas.

189

1. $p \wedge q$
2. $p \Rightarrow r$
   $\vdash$
3. $p \wedge r$

Será necesario obtener

conclusiones intermedias

que, junto con las premisas dadas,
nos permitan llegar a la
conclusión final, quedando
demostrada, en esta forma,
la conexión lógica entre
las premisas y la conclusión.

190

1. $p \wedge q$ (P)
2. $p \Rightarrow r$ (P)
   $\vdash$
3. $p \wedge r$ (C) ← Conclusión

Observemos cuidadosamente
el argumento así representado,
e intentemos bosquejar una estrategia
para mostrar la conexión lógica
entre las premisas y la conclusión.

191

Por ejemplo,
podemos observar que:

1. De $p \wedge q$
podemos deducir p,
de acuerdo con [ ]

(indicar en forma abreviada,
la regla de inferencia adecuada)

1. $p \wedge q$ (P)
2. $p \Rightarrow r$ (P)
   $\vdash$
3. $p \wedge r$ (C)

simpl

192

1.De $\mathbf{p \wedge q}$ deducimos: **p**

por simpl

2. De $\mathbf{p \Rightarrow r}$ y **p**

podemos deducir [ ]
por: [ ]

1. $p \wedge q$ (P)
2. $p \Rightarrow r$ (P)
   $\vdash$
3. $p \wedge r$ (C)

r
mpp

193

1. De $p \wedge q$ deducimos **p**

por simpl

2. De $p \Rightarrow r$ y **p** deducimos **r**

por mpp

3. De **p** y **r**

podemos deducir: ⌊_____⌋
por ⌊_____⌋

1. $p \wedge q$ (P)
2. $p \Rightarrow r$ (P)
   $\vdash$
3. $p \wedge r$ (C)

$p \wedge r$
conj

194

En los dos cuadros siguientes
se muestra
una posible estrategia
para la demostración
de la validez del
argumento ➞

1. $p \wedge q$ (P)
2. $p \Rightarrow r$ (P)
   $\vdash$
3. $p \wedge r$ (C)

195

1. De $p \wedge q$
   deducir p
   por simpl

1. $p \wedge q$ (P)
2. $p \Rightarrow r$ (P)
   $\vdash$
3. $p \wedge r$ (C)

196

2. De $p \Rightarrow r$ y p
deducir: r
por mpp

3. De p y r
deducir $p \wedge r$
por conj

1. $p \wedge q$	(P)
2. $p \Rightarrow r$	(P)
$\vdash$	
3. $p \wedge r$	(C)

197

Para la representación simbólica del

argumento

y su

demostración

vamos a disponer las cosas en la siguiente forma:

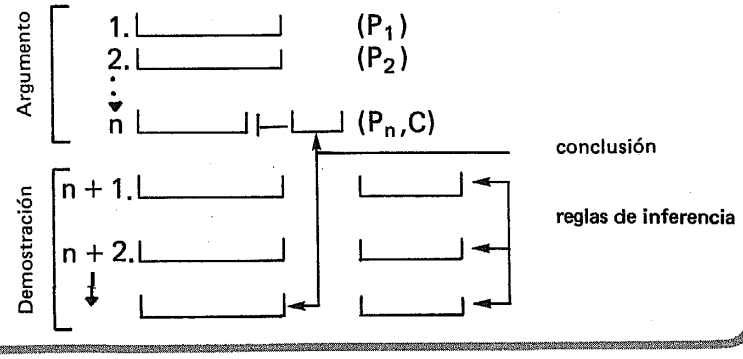
1. $p \wedge q$ (P)
2. $p \Rightarrow r \vdash p \wedge r$ (P, C)

3. demostración:
   ⋮

198

Estudiar con atención.

Disposición de los elementos en la representación simbólica de un argumento y su demostración.



199

Para el argumento
cuya validez estamos demostrando:

1. $p \wedge q$ (P_1)
2. $p \Rightarrow r \quad \vdash p \wedge r$ (P_2, C)
3. p (simpl 1)

Observemos con atención
el primer paso de la demostración
(correspondiente al paso 1 de la estrategia
que hemos trazado).

200

1. $p \wedge q$ (P_1)
2. $p \Rightarrow r \quad \vdash p \wedge r$ (P_2, C)
3. p (simpl 1)
4. ⌊_____⌋

Segundo paso de la demostración.

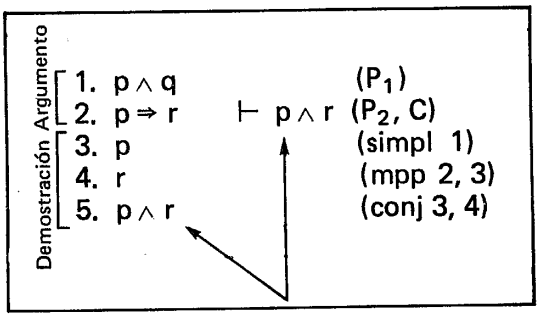
Respuesta
en el
cuadro siguiente.

1. $p \wedge q$ (P_1)
2. $p \Rightarrow r \quad \vdash p \wedge r$ (P_2,C)
3. p (simpl 1)
4. r (mpp 2,3)
5. ⌊_____⌋

Tercer paso de la demostración.

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Estudiar con atención:



La conclusión

201

Sea el argumento

1. $p \Rightarrow q$ (P_1)
2. $\sim p \Rightarrow r$ (P_2)
3. $\sim q \vdash r$ (P_3, C)

cuya válidez hemos también demostrado "en forma global" por medio de una tabla de verdad.

202

Observemos con atención el argumento

1. $p \Rightarrow q$ (P_1)
2. $\sim p \Rightarrow r$ (P_2)
3. $\sim q \vdash r$ (P_3, C)

e
intentemos bosquejar
una estrategia
para su
demostración por
inferencia.

203

1. De $p \Rightarrow q$ y $\sim q$

podemos deducir ⌊____⌋
por ⌊_____⌋

1. $p \Rightarrow q$ (P_1)
2. $\sim p \Rightarrow r$ (P_2)
3. $\sim q \vdash r$ (P_3, C)

$\sim p$
mtt

204

1. De $p \Rightarrow q$ y $\sim q$

deducir $\sim p$
por mtt

2. ⌊_____⌋

1. $p \Rightarrow q$ (P_1)
2. $\sim p \Rightarrow r$ (P_2)
3. $\sim q \vdash r$ (P_3, C)

De $\sim p \Rightarrow r$ y $\sim p$
deducir r
por mpp

205

Una posible estrategia:

1. De $p \Rightarrow q$ y $\sim q$

deducir $\sim p$
por mtt

2. De $\sim p \Rightarrow r$ y $\sim p$

deducir r ←
por mpp

la conclusión

1. $p \Rightarrow q$ (P_1)
2. $\sim p \Rightarrow r$ (P_2)
3. $\sim q \vdash r$ (P_3, C)

1. $p \Rightarrow q$ (P_1)
2. $\sim p \Rightarrow r$ (P_2)
3. $\sim q \vdash r$ (P_3, C)
4. ⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

1. $p \Rightarrow q$ (P_1)
2. $\sim p \Rightarrow r$ (P_2)
3. $\sim q \vdash r$ (P_3, C)
4. $\sim p$ (mtt 1,3)
5. ⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

1. $p \Rightarrow q$ (P_1)
2. $\sim p \Rightarrow r$ (P_2)
3. $\sim q \vdash r$ (P_3, C)
4. $\sim p$ (mtt 1, 3)
5. r (mpp 2, 4)

la conclusión

La validez del argumento
ha quedado demostrada
por inferencia.

Cualquier argumento particular de la forma

1. $p \Rightarrow q$	(P_1)
2. $\sim p \Rightarrow r$	(P_2)
3. $\sim q \vdash r$	(P_3, C)

es válido.

$[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r) \wedge \sim q] \Rightarrow r$
es una [_____]

Las premisas implican lógicamente a la conclusión,
o bien,
la conclusión se deduce de las premisas.

implicación lógica

3.2.3.7

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

3.2.3
En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* la forma lógica de un argumento particular dado;

- *dar* ejemplos de sustitución de un argumento formal dado;

- *determinar* la validez de un argumento mediante la elaboración de su tabla de verdad;

- *identificar* las siguientes reglas de inferencia:

  — modus ponendo ponens
  — modus tollendo tollens
  — modus tollendo ponens
  — ley de la transitividad
  — ley de la conjunción
  — ley de la simplificación
  — ley de la adición

- *obtener* la conclusión de las premisas de un argumento particular dado;

- *obtener* la conclusión de un conjunto de premisas de un argumento dado en la forma de una de las reglas de inferencia;

- *demostrar,* por inferencia, la validez de un argumento formal dado.

2.4

Reglas de inferencia (equivalencias lógicas)

208

Recordemos que
así como a una

condicional tautológica

le llamamos [implicación lógica]

a una

bicondicional tautológica

le hemos dado el nombre de [equivalencia lógica]

209

La expresión

$\boxed{P \equiv Q}$

representa una equivalencia lógica.

Indica que P y Q son equivalentes;
es decir, tienen la misma
tabla de verdad.

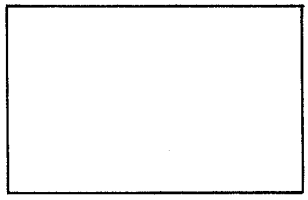
210

Consideremos las dos proposiciones

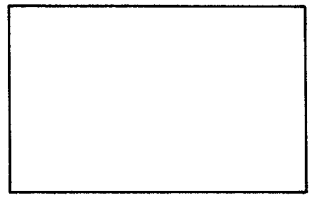
$\boxed{p \wedge q}$ y $\boxed{q \wedge p}$

y elaboremos sus tablas de verdad.

• $p \wedge q$



• $q \wedge p$



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Tablas de verdad

de $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

de $q \wedge p$

p	q	$q \wedge p$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

211

Puesto que
las proposiciones
$p \wedge q$ y $q \wedge p$

tienen la misma tabla de verdad,
decimos que

son equivalentes,

y
podemos escibir:

$$\boxed{p \wedge q \equiv q \wedge p}$$

212

Atención.

En un proceso de demostración,
la proposición
p ∧ q
puede ser sustituida por
su equivalente
q ∧ **p**

por lo tanto,
la regla que permite tal sustitución
podrá ser considerada como una

regla de inferencia.

213

Se llama

ley de conmutatividad

conm

a la regla del juego lógico
que nos permite

cambiar el orden de las componentes
de una proposición compuesta

214

Decimos que

la conjunción es

una forma lógica

conmutativa

Desde el punto de vista lógico,
es lo mismo decir

Juan trabaja y Pedro estudia,

que

Pedro estudia y Juan trabaja.

215

Ahora bien,

la

disyunción inclusiva

¿es conmutativa?

Sí/No

Sí (ver cuadro siguiente)

216

Tablas de verdad

de **p** ∨ **q**

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

de **q** ∨ **p**

p	q	q ∨ p
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

217

La

condicional,

¿es conmutativa?

Sí/No

No (ver cuadro siguiente)

218

Tablas de verdad

de $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

de $q \Rightarrow p$

p	q	$q \Rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

219

La

bicondicional,

¿es conmutativa?

Sí/No

Sí (ver cuadro siguiente)

220

Tablas de verdad

de $p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

de $q \Leftrightarrow p$

p	q	$q \Leftrightarrow p$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

221

Si en la demostración de un argumento, nos encontramos con fórmulas como las siguientes, podemos sustituirlas de acuerdo con la

ley de conmutatividad,

así:

- $p \wedge q$ puede ser sustituida por $\llcorner___\lrcorner$
- $p \vee q$ puede ser sustituida por $\llcorner___\lrcorner$

$q \wedge p$

$q \vee p$

222

No obstante,
la fórmula
$\mathbf{p \Rightarrow q}$
no puede ser sustituida por
$\mathbf{q \Rightarrow p}$

porque
$\mathbf{p \Rightarrow q}$
y
$\mathbf{q \Rightarrow p}$
no son equivalentes.

223

Anotaremos estas dos

1. **Leyes de conmutatividad (conm)**

$p \wedge q \equiv q \wedge p$
$p \vee q \equiv q \vee p$

que nos serán de particular utilidad.

224

A continuación presentaremos

otras

importantes

reglas de inferencia

en la forma de

equivalencias lógicas

las cuales podemos comprobar
como lo hemos hecho con la conmutatividad.

225

2. Leyes de asociatividad (asoc)

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

226

3. Leyes de distributividad (distr)

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

227

4. Leyes de De Morgan (De M)

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

228

5. Ley de exportación (exp)

$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

229

6. Ley de contraposición (contr)

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

230

7. Leyes de idempotencia (idem)

$p \wedge p \equiv p$

$p \vee p \equiv p$

231

8. Definiciones (def)

$\sim\sim p \equiv p$	Doble negación
$p \veebar q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	Disyunción exclusiva
$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	Condicional
$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	Bicondicional

232

La fórmula

$r \vee r$

puede ser sustituida por ⌊___⌋

de acuerdo con la regla de inferencia llamada

⌊_____⌋

r

ley de idempotencia de la disyunción inclusiva

233

La fórmula $s \Leftrightarrow t$

puede ser sustituida por [ ]

de acuerdo con

[ ]

$(s \Rightarrow t) \wedge (t \Rightarrow s)$

la definición de la bicondicional

234

La fórmula $m \veebar n$

puede ser sustituida por [ ]

de acuerdo con

[ ]

$(m \wedge \sim n) \vee (\sim m \wedge n)$

la definición de la disyunción exclusiva

235

La fórmula $m \wedge n$

puede ser sustituida por [ ]

de acuerdo con

[ ]

$n \wedge m$

la ley de conmutatividad de la conjunción

236

La fórmula $p \vee q$

puede ser sustituida por [ ]

de acuerdo con

[ ]

$q \vee p$

la ley de conmutatividad de la disyunción inclusiva

237

La fórmula $\sim\sim w$

puede ser sustituida por [ ]

de acuerdo con

[ ]

w

la definición de la doble negación

238

La fórmula $r \wedge (s \wedge t)$

puede ser sustituida por [ ]

de acuerdo con

[ ]

$(r \wedge s) \wedge t$

la ley de asociatividad de la conjunción

239

La fórmula $m \wedge m$

puede ser sustituida por [____]

de acuerdo con

[_____]

m

la ley de la idempotencia de la conjunción

240

La fórmula $p \wedge (m \vee n)$

puede ser sustituida por [_____]

de acuerdo con

[_____]

$(p \wedge m) \vee (p \wedge n)$

la ley de la distributividad de la conjunción con respecto a la disyunción inclusiva

241

La fórmula $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

puede ser sustituida por [_____]

de acuerdo con

[_____]

$p \vee (q \wedge r)$

la ley de distributividad de la disyunción inclusiva con respecto a la conjunción

242

La fórmula **r ⇒ s**

puede ser sustituida por [_____]

de acuerdo con la

definición de la condicional.

∼ r ∨ s

243

La fórmula **r ⇒ s**

puede ser sustituida por [_____]

de acuerdo con la

ley de contraposición.

∼ s ⇒ ∼ r

244

La fórmula **∼ t ⇒ ∼ q**

puede ser sustituida por [_____]

de acuerdo con la

ley de contraposición.

q ⇒ t

245

La fórmula $(r \wedge s) \Rightarrow t$

puede ser sustituida por [_____]

de acuerdo con

[_____]

$r \Rightarrow (s \Rightarrow t)$

la ley de la exportación

246

La fórmula $m \Rightarrow (n \Rightarrow p)$

puede ser sustituida por [_____]

de acuerdo con

[_____]

$(m \wedge n) \Rightarrow p$

la ley de exportación

247

La fórmula $\sim (r \wedge s)$

puede ser sustituida por [_____]

de acuerdo con

[_____]

$\sim r \vee \sim s$

una de las leyes de De Morgan

248

La fórmula $\sim (r \vee s)$

puede ser sustituida por [ ]

de acuerdo con

[ ]

$\sim r \wedge \sim s$

una de las leyes de De Morgan

249

La fórmula $\sim m \vee \sim n$

puede ser sustituida por [ ]

de acuerdo con

[ ]

$\sim (m \wedge n)$

una de las leyes de De Morgan

250

La fórmula $\sim m \wedge \sim n$

puede ser sustituida por [ ]

de acuerdo con

[ ]

$\sim (m \vee n)$

una de las leyes de De Morgan

3.2.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

251

Con la ayuda de las reglas de inferencia estudiadas
(implicaciones lógicas y equivalencias lógicas)
intentaremos demostrar la validez del argumento

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$

Observemos con atención,
y hagamos el intento de
trazar una estrategia
para la demostración.

252

1. **$p \wedge (q \vee r)$**

puede ser sustituida
por ⌊_____⌋

de acuerdo con **distr**

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

1. De $p \wedge (q \vee r)$

obtener $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

por **distr**

2. De $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

obtener [ ]

por **conm**

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

2. De $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

obtener $(p \wedge r) \vee (p \wedge q)$

por **conm**

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$

3. [ ]

por [ ]

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

3. De $(p \wedge r) \vee (p \wedge q)$ y $\sim (p \wedge r)$

obtener $(p \wedge q)$

por **mtp**

4. ⌊_____⌋

por ⌊_____⌋

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

4. De $p \wedge q$

obtener q

por **simpl.**

255

Una posible estrategia para la demostración se muestra en este cuadro y los siguientes.

1. De

   $p \wedge (q \vee r)$

   obtener

   $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

   por

   distr

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$

256

2. De

   $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

   obtener

   $(p \wedge r) \vee (p \wedge q)$

   por

   conm

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$

257

3. De

   $(p \wedge r) \vee (p \wedge q)$
   y
   $\sim (p \wedge r)$

   obtener

   $p \wedge q$

   por

   mtp

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$

258

4. De

   p ∧ q

   obtener

   q

   por **simpl.**

1. p ∧ (q ∨ r)
2. ∼ (p ∧ r) ⊢ q

259

1. p ∧ (q ∨ r) (P_1)
2. ∼ (p ∧ r) ⊢ q (P_2, C)
3. [ ] [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente.

1. p ∧ (q ∨ r) (P_1)
2. ∼ (p ∧ r) ⊢ q (P_2,C)
3. (p ∧ q) ∨ (p ∧ r) (distr 1)
4. [ ] [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente.

1. $p \wedge (q \vee r)$	(P_1)
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$	(P_2, C)
3. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(distr 1)
4. $(p \wedge r) \vee (p \wedge q)$	(conm 3)
5. ⌊_____⌋	⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

1. $p \wedge (q \vee r)$	(P_1)
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$	(P_2, C)
3. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(distr 1)
4. $(p \wedge r) \vee (p \wedge q)$	(conm 3)
5. $p \wedge q$	(mtp 2, 4)
6. ⌊_____⌋	⌊_____⌋

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

1. $p \wedge (q \vee r)$	(P_1)
2. $\sim (p \wedge r) \vdash q$	(P_2, C)
3. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	(distr 1)
4. $(p \wedge r) \vee (p \wedge q)$	(conm 3)
5. $p \wedge q$	(mtp 2, 4)
6. q	(simpl 5)

La conclusión

La validez del argumento ha quedado demostrada.

260

Para demostrar la validez
del argumento

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
2. $p \wedge t$
3. $q \vdash r$

Observemos con atención las proposiciones dadas
e intentemos formular un plan de acción.

261

1. De

   $p \wedge t$

   podemos deducir: ⌊___⌋

   por ⌊_____⌋

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
2. $p \wedge t$
3. $q \vdash r$

p

simpl

262

1. De **$p \wedge t$**
   obtenemos **p**
   por **simpl**

2. De **p y q**
   podemos obtener ⌊_____⌋
   por ⌊_____⌋

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
2. $p \wedge t$
3. $q \vdash r$

$p \wedge q$
conj

263

1. De $p \wedge t$
   obtener p
   por **simpl**

2. De p y q
   obtener $p \wedge q$
   por **conj**

3. └──────────┘

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
2. $p \wedge t$
3. $q \vdash r$

De $(p \wedge q) \Rightarrow r$
y $p \wedge q$
obtener r
por mpp

264

Estudiar con atención la estrategia completa, presentada en este cuadro y los dos siguientes.

1. De $p \wedge t$
   obtener p
   por **simpl**

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
2. $p \wedge t$
3. $q \vdash r$

265

2. De p y q
   obtener $p \wedge q$
   por **conj**

1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
2. $p \wedge t$
3. $q \vdash r$

266

3. De $(p \wedge q) \Rightarrow r$
y $p \wedge q$
obtener r
por **mpp**

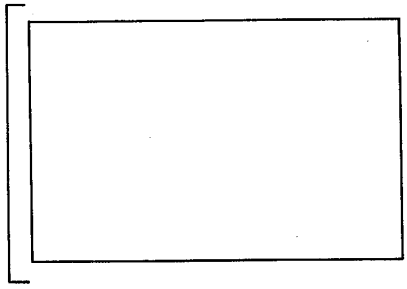
1. $(p \wedge q) \Rightarrow r$
2. $p \wedge t$
3. $q \vdash r$

267

Argumento →

1.	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	(P_1)
2.	$p \wedge t$	(P_2)
3.	$q \vdash r$	(P_3, C)

Demostración:



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

1.	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	(P_1)
2.	$p \wedge t$	(P_2)
3.	$q \vdash r$	(P_3, C)
4.	p	(simpl 2)
5.	$p \wedge q$	(conj 4,3)
6.	r	(mpp 1, 5)

La conclusión

268

Por este procedimiento
puede ser demostrada la validez
de argumentos cada vez más complejos,
pero la adquisición de la habilidad necesaria
requiere de gran cantidad de práctica.

269

Si después de un buen número de intentos
en la búsqueda de una conexión lógica
entre las premisas y la conclusión,
no logramos encontrarla,
no significa esto que no exista tal conexión.

El hecho de no poder demostrar que
un argumento sea válido, no nos permite
concluir que es inválido.

270

Debemos recordar que
contamos con un procedimiento alternativo
para demostrar la validez de un argumento,
mediante tablas de verdad
que,
aunque puede resultar laborioso cuando el
número de variables es grande,
es seguro.

3.2.4.2

Práctica adicional
de
demostración de la validez
de argumentos
por inferencia y/o mediante
tablas de verdad,
si se considera necesario.

3.2.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* las siguientes reglas de inferencia en forma de equivalencias lógicas:
  - Leyes de conmutatividad
  - Leyes de asociatividad
  - Leyes de distributividad
  - Leyes de De Morgan
  - Ley de exportación
  - Ley de contraposición
  - Leyes de idempotencia
  - Definiciones
- *dar* la fórmula que puede usarse para sustituir una fórmula dada, indicando la regla de inferencia que permite tal sustitución;
- *intentar* la demostración por inferencia, de la validez de un argumento dado. En el caso de no lograrse mostrar la conexión lógica entre las premisas y la conclusión por el método indicado, efectuar la demostración por medio de tablas de verdad.

2.5

La demostración matemática.

271

Alguien nos asegura que

El cuadrado de un número par es también un número par,

o, en forma de proposición condicional:

Si un número es par, entonces su cuadrado es par,

o, en símbolos:

x *es par* $\Rightarrow x^2$ *es par*

272

Ante la duda de la veracidad de la proposición, probamos con algunos casos particulares, buscando alguna instancia en que siendo x par, x^2 no lo sea.

x es par $\Rightarrow$ x^2 **es par**

0 es par $\Rightarrow$ $0^2 = 0$ es par

V/F V/F

V/F

V V

V

273

x es par $\Rightarrow$ x^2 **es par**

2 es par $\Rightarrow$ $2^2 = 4$ es par

V/F V/F

V/F

V V

V

274

x es par $\Rightarrow$ x^2 **es par**

10 es par $\Rightarrow$ $10^2 = 100$ es par

V/F V/F

V/F

V V

V

275

Sabemos que con una sola instancia, en que siendo verdadero el antecedente (x es par) resutara falso el consecuente (x^2 es par) podríamos asegurar que la condicional

x es par $\Rightarrow$ x^2 **es par**

es falsa.

Pero como no podemos probar, a través del ensayo con cada uno de los números enteros, la verdad de la proposición, exigimos una **demostración**

276

Se nos presenta el siguiente argumento:

1. **x es par**	Por hipótesis.
2. x es par $\Rightarrow x = 2n$	Por la definición de un número par.
3. $x = 2n$	(mpp 2,1).
4. $x = 2n \Rightarrow x^2 = 4n^2$	Propiedad multiplicativa de la igualdad
5. $x^2 = 4n^2$	(mpp 4, 3).

continúa en el cuadro siguiente.

277

6. $x^2 = 4n^2 \Rightarrow x^2 = 2\,(2n^2)$	Propiedad sustitutiva de la igualdad $4n^2 = 2\,(2n^2)$, por factorización.
7. $x^2 = 2\,(2n^2)$	(mpp 6,5).
8. $x^2 = 2(2n^2) \Rightarrow x^2$ es par	Definición de número par.

por lo tanto

9. x^2 **es par**	(mpp 8,7).

278

Si aceptamos la verdad de cada una de las proposiciones (premisas) y las reglas del juego por medio de las cuales obtenemos una proposición de otra, debemos aceptar la verdad de la proposición

x es par $\Rightarrow x^2$ es par.

279

Podemos observar cómo
de la proposición

x es par

hemos deducido
la nueva proposición

x^2 es par

lo cual hace valedera la condicional

x es par ⇒ x^2 es par.

280

Se nos ha demostrado que

El cuadrado de un número par
es también un número par.

281

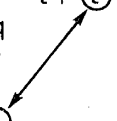
Siendo verdadera la proposición:

Si un número es par,
entonces su cuadrado es par,

no puede darse el caso de que,
siendo x *un número par* (antecedente),
sea falso que x^2 *es un número par* (consecuente).

Una representación simbólica
del argumento presentado
junto con la demostración de su validez,
puestos en la forma convenida:

1. p	(P_1)
2. $p \Rightarrow q$	(P_2)
3. $q \Rightarrow r$	(P_3)
4. $r \Rightarrow s$	(P_4)
5. $s \Rightarrow t \vdash (t)$	(P_5, C)
6. q	(mpp 2, 1)
7. r	(mpp 3, 6)
8. s	(mpp 4, 7)
9. (t)	(mpp 5, 8)



3.2.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

3.2.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *aplicar* los conocimientos adquiridos de lógica proposicional a la demostración de algunas proposiciones matemáticas, por inferencia directa.

Temas adicionales de estudio:

- Las proposiciones de la lógica cuantificacional.
- Los argumentos de la lógica cuantificacional.
- Inferencia inductiva.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de mayo de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,
Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,
Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

C EV KC 100